חלק א': שאלות פתוחות – $11+11=22$ נקודות

בשאלות הפתוחות <u>יש לתת פתרון מלא, מנומק ומפורט</u>, ולהקפיד על כתיבה ברורה ומסודרת.

<u>שאלה 1</u> [11 נקודות]

הוכיחו באינדוקציה מתמטית שלכל $n \in \mathbb{N}$:

$$3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + \cdots + 3^{2n+1} = \frac{1}{2}(3^{2n+2} - 3^n)$$

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על $n \in N$.

<u>בסיס האינדוקציה- $n=1$</u> :

באגף ימין נקבל: $\frac{1}{2}(3^{2+2} - 3^1) = \frac{1}{2}(81-3) = \frac{78}{2} = 39$

ובאגף שמאל נקבל: $3^1 + 3^2 + 3^3 = 3 + 9 + 27 = 39$

<u>שלב האינדוקציה</u>: נניח נכונות עבור n $(n \geq 1)$

(כלומר הנחת האינדוקציה: $3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2} + \cdots + 3^{2n+1} = \frac{1}{2}(3^{2n+2} - 3^n)$)

ונראה נכונות עבור $n+1$. כלומר צ"ל:

$$3^{n+1} + 3^{n+2} + \cdots + 3^{2n+1} + 3^{2n+2} + 3^{2n+3} = \frac{1}{2}(3^{2n+4} - 3^{n+1})$$

נשים לב שלפי הנחת האינדוקציה:

$$3^{n+1} + 3^{n+2} + \cdots + 3^{2n+1} + 3^{2n+2} + 3^{2n+3} =$$

$$= \frac{1}{2}(3^{2n+2} - 3^n) - 3^n + 3^{2n+2} + 3^{2n+3} =$$

$$= \frac{3^{2n+2} - 3^n - 2\cdot 3^n + 2\cdot 3^{2n+2} + 2\cdot 3^{2n+3}}{2} =$$

$$= \frac{3^{2n+2} - 3^n - 2\cdot 3^n + 2\cdot 3^{2n+2} + 2\cdot 3\cdot 3^{2n+2}}{2} =$$

$$= \frac{3^{2n+2}(1+2+6) - 3^n(1+2)}{2} = \frac{3^{2n+2}\cdot 9 - 3^n\cdot 3}{2} =$$

$$= \frac{3^{2n+2}\cdot 3^2 - 3^n\cdot 3}{2} = \frac{3^{2n+4} - 3^{n+1}}{2}$$

<u>שאלה 2</u> [11 נקודות]

הוכיחו <u>ללא שימוש בטבלת אמת</u> כי מתקיים:

$$(\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)\big) \equiv p \leftrightarrow \neg q$$

<u>הוכחה</u>:

$$(\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)\big) \equiv_{a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b} (\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big(\neg(p \wedge q) \vee (\neg p \vee q)\big) \equiv_{\substack{\text{DeMorgan} \\ \neg(a \wedge b) \equiv \neg a \vee \neg b}}$$

$$\equiv (\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q)\big) \equiv_{\substack{\text{Associativity and} \\ \text{commutativity of } \vee}} (\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \big((\neg p \vee \neg p) \vee (\neg q \vee q)\big) \equiv$$

$$\equiv_{\substack{\neg q \vee q \equiv T \\ a \vee T \equiv T}} (\neg p \leftrightarrow q) \leftrightarrow T \equiv (\neg p \leftrightarrow q) \equiv (\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p) \equiv_{a \rightarrow b \equiv \neg b \rightarrow \neg a} (\neg q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \neg q) \equiv$$

$$\equiv p \leftrightarrow \neg q$$

חלק ב': שאלות ברירה – $13 \times 6 = 78$ נקודות

לפניך 13 שאלות ברירה. בכל שאלה עליך לסמן את התשובה הנכונה מבין 4 האפשרויות הרשומות.

<u>שאלה 1:</u>

נתון הפסוק הבא:

$$\neg\forall x: \left(x \in \mathbb{R} \rightarrow \exists m \exists n: \left(m \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ x = \frac{m}{n}\right)\right)$$

מה הפסוק השקול לוגית לפסוק זה ללא שימוש מפורש בקשר השלילה ?

א.

$$\exists x: \left(x \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall m \forall n: \left(m \notin \mathbb{Z} \ \vee \ n \notin \mathbb{N} \ \vee \ x \neq \frac{m}{n}\right)\right)$$

ב.

$$\exists x: \left(x \in \mathbb{R} \ \wedge \ \exists m \exists n: \left(m \notin \mathbb{Z} \ \vee \ n \notin \mathbb{N} \ \vee \ x \neq \frac{m}{n}\right)\right)$$

ג.

$$\exists x: \left(x \notin \mathbb{R} \rightarrow \forall m \forall n: \left(m \notin \mathbb{Z} \ \vee \ n \notin \mathbb{N} \ \vee \ x \neq \frac{m}{n}\right)\right)$$

ד.

$$\exists x: \left(x \in \mathbb{R} \ \wedge \ \forall m \forall n: \left(m \notin \mathbb{Z} \ \wedge \ n \notin \mathbb{N} \ \wedge \ x \neq \frac{m}{n}\right)\right)$$

<u>פתרון: סעיף א.</u>

הפסוק השקול לוגית לפסוק:

$$\neg\forall x: \left(x \in \mathbb{Q} \rightarrow \exists m \exists n: \left(m \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n \in \mathbb{N} \ \wedge \ x = \frac{m}{n}\right)\right)$$

הוא הפסוק הבא:

$$\exists x: \left(x \in \mathbb{Q} \wedge \forall m \forall n: \left(m \notin \mathbb{Z} \ \vee \ n \notin \mathbb{N} \ \vee \ x \neq \frac{m}{n}\right)\right)$$

ניתן לראות שבשאר הסעיפים יש שינוי בסימנים: $\wedge, \exists, \rightarrow, \notin$ ולכן הם אינם נכונים.

שאלה 2:

מצא את צורת ה-DNF של הפסוק הבא:

$$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r)$$

א.

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

ב.

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

ג.

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

ד.

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

פתרון: סעיף א.

התשובה הראשונה נכונה – לפי האלגוריתם למעבר בין הצורות הנורמליות, כששוללים את הפסוקיות

שבפסוק מקבלים:

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r, p \wedge \neg q \wedge \neg r, \neg p \wedge q \wedge \neg r, \neg p \wedge \neg q \wedge r, \neg p \wedge q \wedge r$$

ושאר 3 הפסוקיות שלא נמצאות כאן הן אלו שמופיעות בפסוק שבתשובה הראשונה.

שאלה 3:

נתבונן בפסוק: $A \equiv \Big(\big((p \to q) \wedge (q \to r)\big) \to (p \to r)\Big) \vee (\neg q \oplus p)$. מהי הטענה הנכונה?

א. A טאוטולוגיה.

ב. בצורת ה-DNF של $\neg A$ יש 3 פסוקיות.

ג. מתקיים: $A \Rightarrow (q \oplus r) \vee (r \wedge p)$

ד. A סתירה.

פתרון: סעיף א.

5. התשובה הראשונה נכונה – הפסוק הוא מהצורה $A = B \vee C$. כעת, אפשר באמצעות טבלה, ואפשר לחלק למקרים:

אם $r = T$, אז הפסוק $p \to r$ הוא T, לכן $B = T$ ולכן כל הפסוק הוא T.

אחרת, אם $r = F$ – אם $q = T$ הפסוק B הוא T ולכן כל הפסוק הוא T.

אם $r = F$ וגם $q = F$, אם $p = T$ אז הפסוק B הוא T ולכן כל הפסוק הוא T.

אם $r = F$ וגם $q = F$, אם $p = F$ אז הפסוק C הוא T ולכן כל הפסוק הוא T.

סה"כ, הפסוק תמיד T.

לכן, התשובות השניה והרביעית אינן נכונות.

התשובה השלישית לא נכונה, כי הפסוק $(q \oplus r) \vee (r \wedge p)$ אינו טאוטולוגיה (למשל עבור $p, r, q = F$)

שאלה 4:

נגדיר פרדיקט בינארי: $P(x,y):\ \ x+y=17$ עם תחומי ההגדרה: $D_x = D_y = \mathbb{R}$.

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

א. הפסוק $\left(\forall x \exists y: P(x,y)\right) \rightarrow \left(\forall x \forall y: P(x,y)\right)$ הוא פסוק אמת.

ב. הפסוק $\left(\forall x \exists y: P(x,y)\right) \rightarrow \left(\exists x \exists y: P(x,y)\right)$ הוא פסוק אמת.

ג. הפסוק $\left(\forall x \forall y: P(x,y)\right) \rightarrow \left(\exists x \forall y: P(x,y)\right)$ הוא פסוק שקר.

ד. הפסוק $\left(\forall x \exists y: P(x,y)\right) \wedge \left(\exists x \forall y: P(x,y)\right)$ הוא פסוק אמת.

פתרון: סעיף ב

$$\forall x \exists y: P(x,y) = T \qquad \exists x \exists y: P(x,y) = T$$
$$\forall x \forall y: P(x,y) = F \qquad \exists x \forall y: P(x,y) = F$$

לכן

$$\left(\forall x \exists y: P(x,y)\right) \rightarrow \left(\exists x \exists y: P(x,y)\right) = T \rightarrow T = T$$
$$\left(\forall x \exists y: P(x,y)\right) \rightarrow \left(\forall x \forall y: P(x,y)\right) = T \rightarrow F = F$$

וכן:

$$\left(\forall x \forall y: P(x,y)\right) \rightarrow \left(\exists x \forall y: P(x,y)\right) = F \rightarrow F = T$$
$$\left(\forall x \exists y: P(x,y)\right) \wedge \left(\exists x \forall y: P(x,y)\right) = T \wedge F = F$$

<u>שאלה 5:</u>

איזה מהטיעונים הבאים הוא טיעון תקף?

א.

$$\big((p \uparrow q) \downarrow (q \uparrow r)\big) \vee r \Rightarrow q$$

ב.

$$\big((p \uparrow q) \uparrow (q \uparrow r)\big) \wedge p \Rightarrow r$$

ג.

$$\big((p \uparrow q) \wedge (q \uparrow r)\big) \wedge p \Rightarrow q$$

ד.

$$\big((p \uparrow q) \downarrow (q \uparrow r)\big) \wedge r \Rightarrow p$$

<u>פתרון: סעיף ד.</u>

א. טיעון זה אינו תקף כי אם נציב : $p = T,\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ ,\ r = T$

אז נקבל ש: $\big((p \uparrow q) \downarrow (q \uparrow r)\big) \vee r = \boldsymbol{T}$.

ב. טיעון זה אינו תקף כי אם נציב : $p = T,\ q = T\ ,\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}$

אז נקבל ש: $\big((p \uparrow q) \uparrow (q \uparrow r)\big) \wedge p = \boldsymbol{T}$.

ג. טיעון זה אינו תקף כי אם נציב : $p = T,\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}\ ,\ r = T$

אז נקבל ש: $\big((p \uparrow q) \wedge (q \uparrow r)\big) \wedge p = \boldsymbol{T}$.

ד. טיעון זה תקף כי אם $\big((p \uparrow q) \downarrow (q \uparrow r)\big) \wedge r = T$ אז בהכרח:

$$(p \uparrow q) = F \ \ \wedge \ \ (q \uparrow r) = F \ \ \wedge \ \ r = T$$

כיוון ש: $(p \uparrow q) = F$ נקבל ש: $p = T$ וגם $q = T$

כיוון ש: $(q \uparrow r) = F$ וגם $r = T$ נקבל שוב ש: $q = T$

בסה"כ נקבל ש: $p = T$ כמבוקש.

<u>שאלה 6:</u>

תהי $A = \left\{\emptyset\ ,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\ ,\ \{1\},\{1,\{1\}\}\right\}$. איזו מהטענות הבאות נכונה <u>בהכרח</u>?

א. $\{\emptyset\} \in A$

ב. $\{1\} \subseteq A$

ג. $\{\emptyset\} \subseteq A$

ד. $\{1,\{1\}\} \subseteq A$

<u>פתרון: סעיף ג.</u>

א. לא נכון, כי $\{\emptyset\}$ לא מופיעה ב-A כאיבר בפני עצמו.

ב. לא נכון, כי $1 \notin A$.

ג. נכון, כי $\emptyset \in A$.

ד. לא נכון, כי $\{1\} \in A$ אבל $1 \notin A$.

שאלה 7:

תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. איזו מבין הטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

א. כדי שיתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cup P(B)$ הכרחי שיתקיים $A \subseteq B$.

ב. כדי שיתקיים: $B \cup (C \cap A) = B$ הכרחי ומספיק שיתקיים $C = \emptyset$.

ג. כדי שיתקיים $A \in B$ הכרחי ומספיק שיתקיים $P(A) \cup B = B$.

ד. כדי שיתקיים $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ הכרחי שיתקיים $A \subseteq C$.

פתרון: סעיף א.

א. נכון. נוכיח זאת:

הכרחי: נניח כי $P(A\cap B)=P(A)\cup P(B)$. כידוע, $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$. כך מתקבל: $P(A)\cap P(B)=P(A)\cup P(B)$. כידוע, $X=Y \Leftrightarrow X\cup Y=X\cap Y$. ולכן נובע ש- $P(A)=P(B)$. מכאן $A=B$. בפרט, $A\subseteq B$.

ב. לא נכון, מספיק אך לא הכרחי. נוכיח זאת:

מספיק: $C=\varnothing \Rightarrow B\cup(C\cap A)=B\cup(\varnothing\cap A)=B\cup\varnothing=B$.

לא הכרחי: $C=B\neq\varnothing \Rightarrow B\cup(C\cap A)=B\cup(B\cap A)=B$.

ג. לא נכון, מספיק אך לא הכרחי. נוכיח זאת:

מספיק: אם $P(A)\cup B=B$ אז $P(A)\subseteq B$. לכן כל איבר של $P(A)$ שייך גם ל-B. כיוון ש- $A\in P(A)$, נסיק כי $A\in B$.

לא הכרחי: דוגמא נגדית: תהיינה $A=\{1\},\ B=\{\{1\}\}$. אזי $A\in B$ אך $P(A)\cup B\neq B$ משום ש- $P(A)=\{\varnothing,\{1\}\}$ ולכן $P(A)\cup B=\{\varnothing,\{1\}\}\neq B$.

ד.

לא הכרחי: נתבונן בקבוצות $A=\{1\},C=\{2\},B=\varnothing,D=\{1\}$. אזי $(A\times B)\subseteq(C\times D)$ שכן $\varnothing\subseteq\{(2,1)\}$ אבל $A\not\subseteq C$.

שאלה 8:

תהיינה A,B,C קבוצות כלשהן. איזו מבין הטענות הבאות **אינה** בהכרח נכונה?

א. $(A \triangle B) \times C = (A \times C) \triangle (B \times C)$

ב. $(A \cap C)\backslash B = (A\backslash B) \cap (C\backslash B)$

ג. $(B \triangle C)\backslash A = (A \cup B) \triangle (A \cup C)$

ד. $A \cup (B\backslash C) = (A \cup B)\backslash C$

פתרון: סעיף ד.

א. נכון. נוכיח זאת:

$$\forall (x,y) \in (A\Delta B)\times C:$$
$$(x,y) \in (A\Delta B)\times C \Leftrightarrow x \in A\Delta B \wedge y \in C \Leftrightarrow_{A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)} (x \in A\backslash B \vee x \in B\backslash A) \wedge y \in C \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow_{\text{distributivity}} (x \in A\backslash B \wedge y \in C) \vee (x \in B\backslash A \wedge y \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge x \notin A \wedge y \in C) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x,y) \in A\times C \wedge (x,y) \notin B\times C) \vee ((x,y) \in B\times C \wedge (x,y) \notin A\times C)$$
$$\Leftrightarrow (x,y) \in (A\times C)\Delta(B\times C)$$

ב. נכון. נוכיח זאת:

יהי $x \in (A \cap C)\backslash B \leftrightarrow x \in (A \cap C) \wedge x \notin B$

$$\leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin B \wedge x \in C$$
$$\leftrightarrow x \in (C\backslash B) \wedge x \in (A\backslash B)$$
$$x \in (A\backslash B) \cap (C\backslash B)$$

ג. נכון. נוכיח זאת:

$$(A\cup B)\Delta(A\cup C) = ((A\cup B)\cup(A\cup C))\backslash((A\cup B)\cap(A\cup C)) =_{\substack{\text{associativity of } \cup \\ \text{distributivity}}}$$
$$= (A\cup B\cup C)\backslash(A\cup(B\cap C)) =_{X\backslash Y = X\cap\overline{Y}}$$
$$= (A\cup B\cup C)\cap\overline{(A\cup(B\cap C))} =_{\text{DeMorgan}}$$
$$= (A\cup B\cup C)\cap(\overline{A}\cap\overline{(B\cap C)}) =_{\substack{\text{associativity of } \cap \\ \text{distributivity}}} ((A\cup B\cup C)\cap\overline{A})\cap\overline{(B\cap C)} =$$
$$= ((A\cap\overline{A})\cup((B\cup C)\cap\overline{A}))\cap\overline{(B\cap C)} = (\varnothing\cup((B\cup C)\cap\overline{A}))\cap\overline{(B\cap C)} =$$
$$= ((B\cup C)\cap\overline{A})\cap\overline{(B\cap C)} =_{\substack{\text{associativity and} \\ \text{commutativity of } \cap}} ((B\cup C)\cap\overline{(B\cap C)})\cap\overline{A} =_{X\backslash Y = X\cap\overline{Y}}$$
$$= ((B\cup C)\backslash(B\cap C))\backslash A = (B\Delta C)\backslash A$$

ד. לא נכון. דוגמא נגדית:

$$A = \{1,2,3\},\ \ B = \{2,4\},\ \ C = \{2,5\}$$

$$A \cup (B \backslash C) = \{1,2,3,4\}$$
$$(A \cup B) \backslash C = \{1,3,4\}$$

וברור שאין שוויון.

שאלה 9:

תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה כלשהי ויהי $R \neq \emptyset$ יחס מעליה. מה מהבאים בהכרח לא יתכן?

א. R רפלקסיבי, אנטי סימטרי ולא טרנזיטיבי.

ב. R אנטי רפלקסיבי, אנטי סימטרי וסימטרי.

ג. R סימטרי, טרנזיטיבי ואנטי סימטרי.

ד. R רפלקסיבי, טרנזיטיבי ולא סימטרי.

פתרון: סעיף ב.

א. יתכן. למשל: $A = \{1,2,3\}$, $R = \begin{pmatrix} 12323 \\ 12331 \end{pmatrix}$.

ב. לפי משפט אם יחס R הוא סימטרי ואנטי סימטרי אז: $R \subseteq I_A$, לכן כיון ש: $R \neq \emptyset$ נקבל: $R \cap I_A \neq \emptyset$.
מכאן שהיחס R אינו יכול להיות אנטי-רפלקסיבי.

ג. יתכן. למשל: $A = \{1,2,3\}$, $R = I = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$.

ד. יתכן. למשל: $A = \{1,2,3\}$, $R = \begin{pmatrix} 1232 \\ 1233 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 10:</u>

נתונות הקבוצות: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2,3\}$.

נגדיר יחס <u>שקילות</u> R מעל $P(A)$ באופן הבא:

$$\forall X, Y \in P(A): \quad (\quad XRY \leftrightarrow X \cup B = Y \cup B \quad)$$

מהו האינדקס של יחס השקילות R מעל $P(A)$?

א. 3
ב. 4
ג. 8
ד. 16

<u>פתרון: סעיף ב.</u>

לפי הגדרת היחס נקבל 4 מחלקות שקילות שהן:

$$[\{1,2,3\}] = \{C | C \subseteq \{1,2,3\}\}$$

$$[\{4\}] = \{C \cup \{4\} \mid C \subseteq \{1,2,3\}\}$$

$$[\{5\}] = \{C \cup \{5\} \mid C \subseteq \{1,2,3\}\}$$

$$[\{4,5\}] = \{C \cup \{4,5\} | C \subseteq \{1,2,3\}\}$$

ולכן האינדקס של יחס השקילות R מעל $P(A)$ הוא 4.

שאלה 11:

נגדיר יחס R מעל $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$\forall (a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ (a,b)R(c,d) \ \leftrightarrow \ a \leq c \ \ \wedge \ \ b \geq d$$

(הקבוצה $\mathbb{N}$ היא קבוצת המספרים הטבעיים).

איזו מהטענות הבאות בהכרח נכונה?

א. היחס הנתון הוא יחס סדר חלקי אך לא יחס סדר מלא, ואין בו איבר מינימלי.

ב. היחס הנתון הוא יחס סדר חלקי וגם יחס סדר מלא, והאיבר המינימלי הוא $(1,1)$.

ג. היחס הנתון הוא יחס סדר חלקי וגם יחס סדר מלא, ואין בו איבר מינימלי.

ד. היחס הנתון הוא יחס שקילות והאינדקס של יחס השקילות הוא אינסופי.

פתרון: סעיף א.

היחס הנתון הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי , לא סימטרי וטרנזיטיבי, לכן הוא יחס סדר חלקי ולא יחס שקילות.

היחס R אינו סימטרי כי למשל:

מתקיים ש: $((1,4),(3,2)) \in R$ כי $1 \leq 3 \ \ \wedge \ \ 4 \geq 2$

אבל: $\big((3,2),(1,4)\big) \notin R$ כי $3 \nleq 1 \ \ \wedge \ \ 2 \ngeq 4$

היחס R אינו יחס סדר מלא כי למשל $\big((2,1),(3,3)\big) \notin R$ וגם $\big((3,3),(2,1)\big) \notin R$.

האיבר $(1,1)$ אינו מינימלי כי $((1,2),(1,1)) \in R$.

ביחס זה אין איבר מינימלי כי לכל $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\big((a,b+1),(a,b)\big) \in R$.

ואין איבר מקסימלי כי לכל $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: $\big((a,b),(a+1,b)\big) \in R$.

שאלה 12:

תהי $A = \{2,4,6\}$ ונגדיר יחס R מעל $A \times A$ באופן הבא:

$$\forall (a,b),(c,d) \in A \times A \ : \ (a,b)R(c,d) \ \leftrightarrow \ a|c \ \ \wedge \ \ b|d$$

איזו מהטענות הבאות היא הטענה הנכונה?

א.

$(A \times A\,, R)$ הוא קס״מ, אך לא קמ״מ ולא קס״ה, ואין איבר מקסימלי.

ב.

$(A \times A\,, R)$ הוא קמ״מ וקס״מ ולכן קס״ה.

ג.

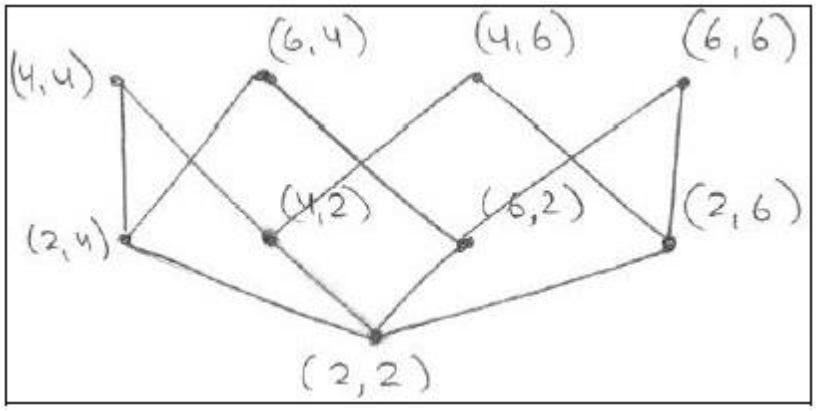
$(A \times A\,, R)$ הוא קמ״מ, אך לא קס״מ ולא קס״ה, ואין איבר גדול ביותר.

ד.

$(A \times A\,, R)$ הוא לא קמ״מ, לא קס״מ ולא קס״ה, ואין איבר גדול ביותר.

פתרון: סעיף ג.

דיאגרמת הסה עבור היחס R היא:



מדיאגרמת הסה זו ניתן לראות ש- $(A \times A\,, R)$ הוא קמ״מ, אך לא קס״מ ולא קס״ה, ואין איבר גדול ביותר.
יש איבר מינימלי יחיד ואיבר קטן ביותר שהוא $(2,2)$, ויש 4 איברים מקסימליים.

שאלה 13:

נתון ש- $(A\,,R)$ הוא קס״ח, כאשר $A \neq \emptyset$. מה מהבאים בהכרח לא יתכן?

א.

$(A\,,R)$ קס״מ ויש בו שני איברים מקסימליים ו-2 איברים מינימליים.

ב.

$(A\,,R)$ קמ״מ, וישנו איבר שהוא גם מינימלי וגם מקסימלי.

ג.

אוסף האיברים המינימליים ב- $(A\,,R)$ הם אנטי-שרשרת בה.

ד.

$(A\,,R)$ קס״מ ויש בו איבר קטן ביותר, אך אין בו איבר מקסימלי וגם לא גדול ביותר.

פתרון: סעיף א.

סעיף א לא יתכן, כי אם $(A\,,R)$ קס״מ אז יש בו לכל היותר איבר מינימלי/מקסימלי אחד.
סעיף ב יתכן, למשל: $(\{2,3,4\},|)$, ואז 3 הוא גם מינימלי וגם מקסימלי.
סעיף ג יתכן, לפי משפט.
סעיף ד יתכן, למשל: $(\mathbb{N}\,,\leq)$.